Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n}$.

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par: $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ et (C_f) sa courbe représentative à la page annexe.

1) a- Sur le graphique à la page annexe, placer sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite (U_n). Faire apparaître les traits de construction sur la figure.

b- Conjecturer le comportement à l'infini de la suite (U_n).

2) a- À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (U_n), conjecturer la forme explicite de (U_n) en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

b- Calculer alors la limite de la suite (U_n).

3) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 0,995$.

Exercice 4 (6 points)

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (U_n) définie sur N par:

$$U_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{7}{U_n}\right).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

1) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{7}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n \geq \sqrt{7}$.

2) a- Soit n un entier naturel quelconque. Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

b- Pourquoi peut-on en déduire que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ ?

c. Calculer ℓ.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(U_n - \sqrt{7}\right)^2}{U_n}$.

4) On définit la suite (d_n) par: $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n^{\,2}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

Exercice 5 (7 points)

Une école de danse a ouvert ses portes en 2016. Cette année là, elle comptait 800 inscrits.

Chaque année, elle prévoit une augmentation de 15% des inscriptions ainsi que 90 désinscriptions.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'inscrits l'année 2016+n.

Chaque inscrit paye une cotisation annuelle de 150 euros, sur laquelle l'école conserve un bénéfice de 20 euros après avoir payé tous ses frais fixes.

L'école économise ce bénéfice afin de construire une nouvelle salle de danse. Pour cela, elle a besoin d'un budget de 125 000 euros.

Partie A

Les données sont saisies dans une feuille de calcul donnée en annexe. Le format de cellule a été choisi pour que les nombres de la colonne C soient arrondis à l'unité.

1) Quelle formule peut-on saisir en C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le nombre d'inscrits l'année de rang n ?
2) Quelle formule peut-on saisir en E3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le bénéfice cumulé à l'année de rang n ?
3) Compléter sur l'annexe, à rendre avec la copie, les six cellules des lignes qui correspondent aux années 2021 et 2022.
4) En quelle année l'école pourra-t-elle construire sa nouvelle salle de danse ?

Partie B

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}15u_n - 90$ et préciser u_0.
2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 600$.

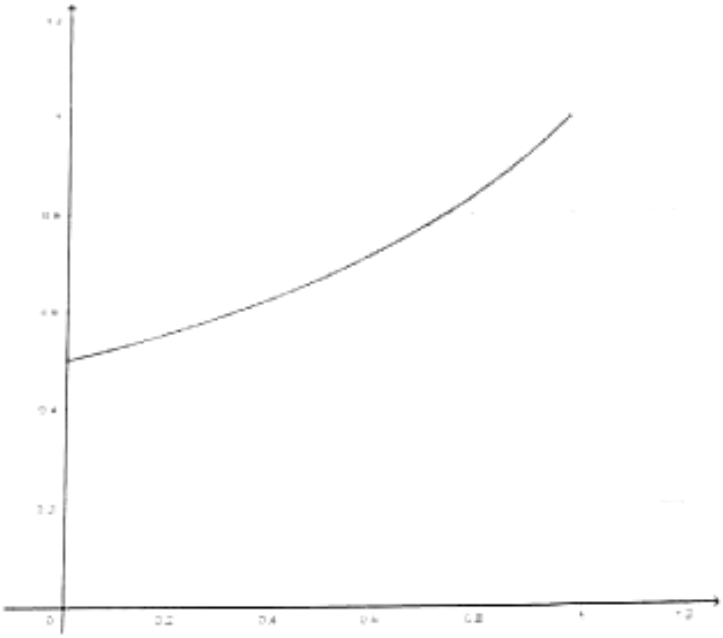
   a- Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0.

   b- Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   c- En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 \times (1{,}15)^n + 600$ puis déduire les variations de (u_n).
3) A partir de quelle année, cette école accueillera-t-elle plus de 2000 adhérents ?

Page annexe
A compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



Exercice 5
Partie A

	A	B	C	D	E
1	année	rang de l'année	nombre d'inscrits	bénéfice annuel	bénéfices cumulés
2	2016	0	800	16 000	16 000
3	2017	1	830	16 600	32 600
4	2018	2	865	17 300	49 900
5	2019	3	904	18 080	67 980
6	2020	4	950	19 000	86 980
7	2021	5			
8	2022	6			